

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2014/15**

**Zadanie 1. Potęga dziewiątki**

Niech  $n$  będzie liczbą naturalną dodatnią. Uzasadnij, że liczbę postaci  $9^n$  można zapisać w postaci sumy trzech kwadratów liczb całkowitych dodatnich.

**Zadanie 2. Kąt prosty w kwadracie**

Punkt E jest środkiem boku AB kwadratu ABCD. Punkt F leży na przekątnej AC tak, że  $|AF| : |FC| = 3 : 1$ . Udowodnij, że kąt EFD jest kątem prostym.

**Zadanie 3. Trzy roztwory**

Mamy do dyspozycji po jednym litrze roztworów soli o stężeniach 5%, 10% i 15%. Chcemy otrzymać roztwór o stężeniu 8%. Oblicz, jaką największą ilość takiego roztworu możemy uzyskać.

**Zadanie 4. Nierówność I**

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb  $a, b$  zachodzi nierówność

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \leq \frac{1}{ab}.$$

**Zadanie 5. Równanie**

Podaj liczbę par liczb naturalnych  $(x, y)$  spełniających równanie  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}$ .

Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 6. Czworoscian**

Czy istnieje czworoscian, którego wysokości mają długość: 3, 6, 8 i 24? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 7. Największa wartość**

Wiadomo, że  $x^2 + xy + y^2 = x + y$ . Wyznacz największą wartość wyrażenia  $x^2 + y^2$ .

**Zadanie 8. Nierówność II**

Uzasadnij, że jeśli liczby  $x, y, z$  są dodatnie, to prawdziwa jest nierówność

$$x^{2015}(x-y)(x-z) + y^{2015}(y-x)(y-z) + z^{2015}(z-x)(z-y) \geq 0.$$

**WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY**  
**im. prof. Stefana Banacha**  
**(dla uczniów klas I i II szkół ponadgimnazjalnych)**  
**Zadania I etapu na rok szkolny 2014/15**

**Zadanie 9. Potęga piątki**

Czy równanie  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 5^{2015}$  ma rozwiązanie w liczbach całkowitych  $a, b, c, d$ ?  
Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 10. Sześcián i sześciániki**

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną  $n$  taką, że sześcián o krawędzi długości  $n$  można rozciąć na 2015 sześciáników, których długości krawędzi są liczbami naturalnymi.

**Zadanie 11. Potęga potęgi**

Niech  $n = 2015^{2015}$ . Wyznacz pierwszą cyfrę po przecinku liczby  $\sqrt{n^2 + n + 1}$ .

**Zadanie 12. Czworokąt**

Dany jest czworokąt, którego dwa przeciwległe kąty są proste. Boki przy jednym kącie prostym mają długości  $a$  i  $b$ , przy drugim kącie prostym boki są równe. Oblicz odległość pomiędzy wierzchołkami kątów prostych.

---

Rozwiązania zadań sprawdzają nauczycieli matematyki oceniając każde w skali od 0 do 5 punktów. Zestawienie wyników z punktacją za każde zadanie prosimy o przesłanie na adres:

**Zespół Szkół nr 10 im. Prof. Stefana Banacha**  
**87-100 Toruń, plac Św. Katarzyny 9**  
**tel. (0-56) 622-27-33**

lub na:

**e-mail: tmaslow@onet.eu**

do dnia 9 marca 2015 roku. Finał wojewódzki dla około 100 autorów najlepszych prac odbędzie się 27 i 28 marca 2015 roku w Zespole Szkół nr 10 w Toruniu. W trakcie tych dni odbędą się zawody indywidualne (w piątek) i zespołowe (w sobotę). W zawodach zespołowych uczestniczą szkoły, które mogą wyłonić (spośród zakwalifikowanych do drugiego etapu) 3-osobową drużynę. Każda szkoła mogą reprezentować najwyżej dwie drużyny oraz co najwyżej dziesięciu uczniów.