Źródło materiałów

Rozszerzony program matematyki w gimnazjum

Poradnik nauczyciela matematyki

Wojciech Guzicki

Koło dla Gimnazjmu nr 11 23 kwietnia 2014 roku

Zestaw 1.
Liczby w zapisie dziesiętnym

1. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 3.
2. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 7.
3. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{77\ldots7}_{40}$ jest złożona.
4. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
5. Rozstrzygnij, czy liczba $\underbrace{11\ldots1}_{14}\underbrace{22\ldots2}_{7}\underbrace{11\ldots1}_{14}+6$ jest pierwsza.
6. Udowodnij, że liczba $7\underbrace{55\ldots5}_{100}99$ jest podzielna przez 17.
7. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}1\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
8. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
9. Udowodnij, że liczby postaci $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ są złożone.
10. Udowodnij, że liczba $4\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ jest złożona.
11. Udowodnij, że

$$\Big(\underbrace{66\ldots6}_{100}\Big)^2 < \underbrace{44\ldots4}_{200} < \Big(\underbrace{66\ldots6}_{99}7\Big)^2.$$

12. Udowodnij, że liczba $32\underbrace{00\ldots0}_{7}201$ jest złożona.
13. Udowodnij, że liczba 312500051 jest złożona.
14. Udowodnij, że liczba 1280000401 jest złożona.
15. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{2013}1$ jest złożona.

Zestaw 2.

Różne rodzaje liczb

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p + 400$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Udowodnij, że liczba $4^6 + 4 \cdot 6^5 + 9^5$ jest złożona.

3. Udowodnij, że liczba $2^{18} + 32 \cdot 10^5 + 5^{10}$ jest złożona.

4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 1$, dla których liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.

5. Udowodnij, że liczba $2^{2002} + 5^{2000}$ jest złożona.

6. Udowodnij, że liczba $4^{15} + 15^4$ jest złożona.

7. Wykaż, że liczba $2^{14} + 5^8$ jest złożona.

8. Wykaż, że liczba $2^{20} + 4 \cdot 6^8 + 9^8$ jest złożona.

9. Wykaż, że liczba $2^{16} - 2 \cdot 6^7 + 3^{14}$ jest złożona.

10. Wykaż, że liczba $111^4 + 111^2 + 1$ jest złożona.

11. Wykaż, że liczba $9 \cdot 15^4 + 5 \cdot 15^2 + 1$ jest złożona.

12. Wykaż, że liczba $2^{10} \cdot 3^{14} + 2^7 \cdot 3^6 + 1$ jest złożona.

13. Wykaż, że liczba $2^{38} + 3 \cdot 2^{18} + 1$ jest złożona.

14. Udowodnij, że jeśli liczba całkowita a jest większa od 2 oraz $n \geq 2$, to liczba $a^n - 1$ jest złożona.

15. Udowodnij, że jeśli liczba n jest złożona, to liczba $2^n - 1$ też jest złożona.

16. Udowodnij, że jeśli liczba n ma dzielnik nieparzysty (większy od 1), to liczba $2^n + 1$ jest złożona.

17. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2 - 2q^2 = 1$.

18. Udowodnij, że jeśli liczby $2n+1$ i $3n+1$ są kwadratami (przy czym $n > 0$), to liczba $5n + 3$ jest złożona.

19. Udowodnij, że liczba $n^5 + n^4 + 1$ jest złożona dla $n > 1$.

20. Udowodnij, że liczba $5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1$ jest złożona.

Zestaw 3.
Kongruencje

1. Udowodnij, że $6 \mid n^3 - n$.

2. Udowodnij, że ostatnią cyfrą liczby 7^{256} jest 1.

3. Znajdź ostatnią cyfrę liczby 2^{100}.

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3^{80} + 7^{80}$ przez 11.

5. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.

6. Udowodnij, że $29 \mid 2^{5n+1} + 3^{n+3}$.

7. Udowodnij, że jeśli $x^2 + y^2 = z^2$, to:

a) co najmniej jedna z liczb x i y jest podzielna przez 3,

b) co najmniej jedna z liczb x i y jest podzielna przez 4,

c) co najmniej jedna z liczb x, y i z jest podzielna przez 5.

8. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ też są pierwsze.

9. Udowodnij, że $6 \mid 7^n - 1$.

10. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

11. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby 2^{999}.

12. Udowodnij, że $11 \mid 2^{6n+1} + 9^{n+1}$.

13. Udowodnij, że $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

14. Udowodnij, że $30 \mid n(n^2 - 11)(n^2 + 11)$.

15. Udowodnij, że $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

16. Udowodnij, że $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$.

17. Wykaż, że liczba $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$ jest złożona.

18. Udowodnij, że $504 \mid n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$.

19. Znajdź liczbę pierwszą p taką, że:

a) $p + 10$ i $p + 14$ są pierwsze;

b) $p + 4$ i $p + 14$ są pierwsze.

20. Znajdź liczbę pierwszą p taką, że:

a) $2p + 1$ i $4p + 1$ są pierwsze;

b) $8p^2 + 1$ jest pierwsza.

21. Udowodnij, że jeśli $p > 3$ i liczby p oraz $10p + 1$ są pierwsze, to liczba $5p + 1$ nie jest pierwsza.

22. Udowodnij, że jeśli liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze, to liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.

Zestaw 4.

Równania diofantyczne

1. Rozwiąż następujące równania w liczbach całkowitych:

a) $xy = x + y$,

b) $xy = x - 2y + 7$,

c) $xy = 7x + 3y - 11$,

d) $2xy = 3x - y + 2$,

e) $6xy = 2x + 9y + 14$.

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite n, dla których następująca liczba jest całkowita:

a) $\frac{n+7}{n+2}$,

b) $\frac{3n+2}{2n+1}$,

c) $\frac{14n+52}{n^2+1}$,

d) $\frac{26n+138}{n^2+1}$.

Rozwiąż następujące równania:

3. $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.

4. $x^2 - y^2 = 31$.

5. $xy = x + y + 3$.

6. $xy + 3x - 5y = -3$.

7. $xy = 20 - 3x + y$.

8. $x^2 - y^2 = 1988$.

9. $x^2 = 14 + y^2$.

10. $x^2 - 7y = 10$.

11. $x^2 - 3y^2 = 8$.

12. $x^2 - 3y = 17$.

13. $15x^2 - 7y^2 = 9$.

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

15. $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.

16. $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$.

17. $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

18. $x^2 + y^2 = 9x + 1$.

19. $x^2 + 4x - 8y = 11$.

20. $x^2 + 5xy - y^2 = 6$.

21. $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

22. $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.